Théorème de Pascal:

Référence : Jean-Denis Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage et Mounet, 2009

Lemme 1 (p.19)**.** *Soit M, N deux points distincts du plan de coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Alors la droite (MN) a pour équation :* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$

Preuve : On peut supposer tous les coordonnées barycentriques normalisées à somme 1 (ce qui ne modifie pas l'annulation du déterminant ci-dessus). Soit P un point de coordonnées barycentriques (X, Y, Z). Alors $P \in (MN)$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MN}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X - x_1 & = & t(x_2 - x_1) \\ Y - y_1 & = & t(y_2 - y_1) \\ Z - z_1 & = & t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Comme tous les coordonnées barycentriques ont été normalisées, la dernière ligne vaut moins la somme des deux autres, et donc il suffit que t vérifie le système des deux premières lignes, c'est-à-dire que

$$0 = \begin{vmatrix} X - x_1 & x_2 - x_1 \\ Y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X - x_1 & x_2 - x_1 & x_1 \\ Y - y_1 & y_2 - y_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x_2 & x_1 \\ Y & y_2 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x_2 & x_1 \\ Y & y_2 & y_1 \\ Z & z_2 & z_1 \end{vmatrix}$$

□

Lemme 2 (p.51)**.** ***(Conique circonscrite)*** *Soient ABC un triangle et $R = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ le repère affine correspondant. L'équation générale d'une conique passant par les trois points A, B, C est $pYZ + qZX + rXY = 0$, où p, q, r sont non tous nuls.*

Preuve : Rappelons qu'un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) possède comme coordonnées cartésiennes le couple $(u = \frac{y}{x+y+z}, v = \frac{z}{x+y+z})$ (où $x + y + z \neq 0$). Partons de l'équation affine (cartésienne) générale des coniques du plan, sous la forme d'une équation polynomiale du second degré :

$$\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma = 0,$$

où les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont non tous les trois nuls. Substituons U par $\frac{Y}{X+Y+Z}$ et V par $\frac{Z}{X+Y+Z}$. On obtient, l'équation suivante (en multipliant par $(X + Y + Z)^2 \neq 0$) :

$$\mathscr{D}(X, Y, Z) = \alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2 + (\beta_1 Y + \beta_2 Z)(X + Y + Z) + \gamma(X + Y + Z)^2 = 0.$$

Une conique passe par les points A, B et C si et seulement si

$$\mathscr{D}(1, 0, 0) = \mathscr{D}(0, 1, 0) = \mathscr{D}(0, 0, 1) = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si

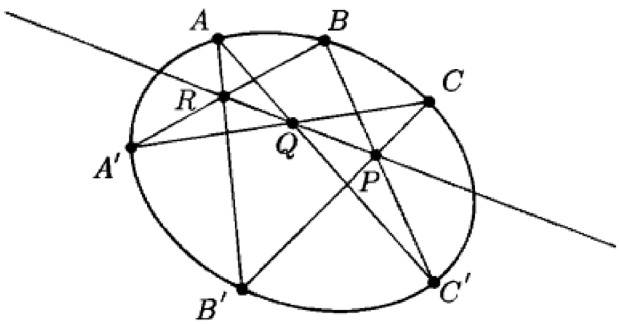
$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_2 + \gamma & = & 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{cases}$$

On obtient alors la forme demandée

$$pYZ + qZX + rXY = 0,$$

avec $p = \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3$, $q = -\alpha_3$ et $r = -\alpha_1$

Théorème 3 (p.90)**.** *Soient six points distincts A, B, C, A', B', C', trois à trois non alignés. Supposons l'existence de P, Q, R, qui sont les points d'intersection de (BC') et $(B'C)$, $(A'C)$ et (AC'), (AB') et $(A'B)$ respectivement. Alors, il existe une conique passant par A, B, C, A', B', C' si et seulement si P, Q, R sont alignés.*



Preuve : Comme A, B, C sont non alignés, considérons le repère barycentrique ABC. Notons (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées barycentriques de A', B', C' respectivement dans ce repère. La droite (BC') a pour équation barycentrique $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $z''X - x''Z = 0$, et de même $(B'C)$ a pour équation barycentrique $x'Y - y'X = 0$. Les coordonnées barycentriques de P, point d'intersection de ces deux droites sont alors $(x'x'', x''y', x'z'')$. Par un calcul similaire (ou par symétrie dans le rôle des coordonnées), on trouve que les coordonnées barycentriques respectives que Q et R sont $(y''x, y''y, yz'')$ et $(z'x, zy', zz'')$. Ainsi, les points P, Q et R sont alignés si et seulement $R \in (PQ)$, si et seulement si $\Delta := \begin{vmatrix} x'x'' & x''y' & x'z'' \\ y''x & y''y & yz'' \\ z'x & zy' & zz' \end{vmatrix} = 0$.

Soit maintenant $\mathscr{C}$ une conique circonscrite au triangle ABC. Son équation barycentrique est du type : $uYZ + vZX + wXY =$ où $u, v, w \in \mathbb{R}$ non tous nuls. Or, $A', B', C' \in \mathscr{C}$ si et seulement si leurs coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{C}$, donc si et seulement si il existe $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, tels que :

$$\begin{cases} uyz + vzx + wxy & = & 0 \\ uy'z' + vz'x' + wx'y' & = & 0 \\ uy''z'' + vz''x'' + wx''y'' & = & 0 \end{cases}$$

L'existence d'un tel triplet équivaut à la nullité de $\Delta' = \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ y'z' & z'x' & x'y' \\ y''z'' & z''x'' & x''y'' \end{vmatrix}$.

Les points A, B, C, A', B', C' étant trois à trois non alignés, $A', B', C' \notin (AB)$, $A', B', C' \notin (AC)$, et $A', B', C' \notin (BC)$ donc $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \neq 0$. Donc (en factorisant la première ligne par $x'x''$, la deuxième par $y''y$ et la troisième par zz', puis en multipliant la première colonne par yz, la deuxième par $z'x'$, et la troisième par $x''y''$) on a :

$$\Delta = x'x''y''yzz' \begin{vmatrix} 1 & y'/x' & z''/x'' \\ x/y & 1 & z''/y'' \\ x/z & y'/z' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & y'z' & z''y'' \\ xz & z'x' & z''x'' \\ xy & y'x' & x''y'' \end{vmatrix} = \Delta'.$$

On obtient alors $\Delta = 0 \iff \Delta' = 0$ ce qui donne l'équivalence souhaitée et achève la démonstration du théorème. $\square$